ロジスティック曲線についての数学的補足

今回の課題
普及モデルの一つとして用いられるロジスティック曲線型の普及について，数学的な補足を行う。
キーワード
標準シグモイド関数，ロジスティック関数

1. はじめに

新技術の普及の典型的モデルとして利用されてきたのは，ロジスティック曲線を使ったモデルであり，この講義もそれに準じて説明している。なぜにこのモデルが使われているのかと言うと，それが当てはまるような現実があるからということとともに，それが数学的に単純だからでもある。単純ではあるが，分かりやすくするためには，話しの順序に工夫が必要である。

ここでは，最初に「2. 標準シグモイド関数」で，ロジスティック関数を含むような一般的な関数であるシグモイド関数（その中でも標準シグモイド関数）から説明を始めて，S の形をした曲線のイメージを持ってもらう。その後で「3. ロジスティック関数」で，講義で見たような普及曲線を特殊的なケースとして含むような，通常のロジスティック関数の説明に移る。最後に「4. 普及曲線」で，講義で見たような新技術の普及のモデルに移る。講義と直接に関係があるのは「4. 普及曲線」だけである。ここを読んで解らない部分だけ，前を参照すれば良いだろう。

ここでは，数学的な説明は必要最低限また基礎的部分に留める。また，分かりやすさを基準にしているために，計算手続きはかなり冗長になっている。

なお，このレジュメの内容は試験範囲外である。

2. 標準シグモイド関数

以下の関数を**標準シグモイド関数**と呼ぶ。

$$\varsigma(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Memo

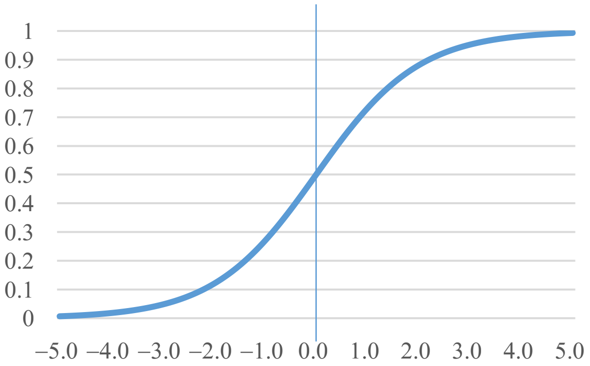
ここでeは自然対数の底（ネイピア数）である[1]。なお，$e^x=\exp(x)$と表現すると，

$$\varsigma(x)=\frac{1}{1+\exp(-x)} \tag{1}$$

になる。

シグモイドとは“ギリシャ語のシグマ（小文字語末系のς）の形の”という意味である。“S字型”とも呼ばれる。

図 1 標準シグモイド関数のイメージ



この関数の1階の導関数$\varsigma'(x)$は，

$$\begin{aligned}
\varsigma'(x)&=\frac{d}{dx}\left[\varsigma(x)\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]=\frac{d}{dx}\left[\left(1+e^{-x}\right)^{-1}\right]\\
&=-\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}\left(1+e^{-x}\right)\\
&=-\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\cdot e^{-x}\cdot\frac{d}{dx}(-x)\\
&=-\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\cdot e^{-x}(-1)\\
&=\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{1}{\left(1+e^{-x}\right)}\cdot\frac{\left(1+e^{-x}\right)-1}{\left(1+e^{-x}\right)}\\
&=\frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(\frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{1}{1+e^{-x}}\right)=\frac{1}{1+e^{-x}}\cdot\left(1-\frac{1}{1+e^{-x}}\right)\\
&=\varsigma(x)\cdot\left[1-\varsigma(x)\right]
\end{aligned}$$

である。2階の導関数$\varsigma''(x)$は，

$$\begin{aligned}
\varsigma''(x)&=\frac{d}{dx}\left\{\varsigma(x)\cdot\left[1-\varsigma(x)\right]\right\}\\
&=\left[1-\varsigma(x)\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[\varsigma(x)\right]+\varsigma(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[1-\varsigma(x)\right]\\
&=\left[1-\varsigma(x)\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[\varsigma(x)\right]-\varsigma(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[\varsigma(x)\right]\\
&=\left[1-\varsigma(x)\right]\cdot\left\{\varsigma(x)\cdot\left[1-\varsigma(x)\right]\right\}-\varsigma(x)\cdot\left\{\varsigma(x)\cdot\left[1-\varsigma(x)\right]\right\}\\
&=\varsigma(x)\cdot\left[1-\varsigma(x)\right]\cdot\left\{\left[1-\varsigma(x)\right]-\varsigma(x)\right\}\\
&=\varsigma(x)\cdot\left[1-\varsigma(x)\right]\cdot\left[1-2\varsigma(x)\right]
\end{aligned}$$

である。また，

$$\varsigma(0)=\frac{1}{1+\exp(0)}=\frac{1}{1+1}=0.5$$

である。その他，まとめると，

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$+\infty$
$\varsigma(x)$	0	↗	0.5	↗	1
$\varsigma'(x)$	0	↗	0.25	↘	0
$\varsigma''(x)$	0	+	0	−	0

1) eについては『利子のコスト化に関連する数学的補足』http://y-imai.com/lectures/handouts/appendix_qualitative-division.pdf の「4.1 ネイピア数」を参照せよ。

Memo

である。

また，

$$\varsigma(-x)=\frac{1}{1+\exp(x)}=\frac{\exp(-x)}{1+\exp(-x)}$$

かつ，

$$-\varsigma(x)+1=-\frac{1}{1+\exp(-x)}+\frac{1+\exp(-x)}{1+\exp(-x)}=\frac{\exp(-x)}{1+\exp(-x)}$$

である。

以上から，標準シグモイド関数は以下の性格を持つ：

- $\lim_{x\to-\infty}\varsigma(x)=0$ かつ $\lim_{x\to\infty}\varsigma(x)=1$ であり，しかも両点では定義されない。つまり，$\varsigma(x)=0$ と $\varsigma(x)=1$ とに漸近線を持つ。
- $\varsigma''(0)=0$ であり，$x=0$ の両側で 2 階の導関数の符号が異なる。つまり，点 $(0, 0.5)$ に変曲点を持つ。
- $\varsigma(-x)=-\varsigma(x)+1$ である。$\varsigma(x)-0.5$ は奇関数であり，したがって，原点について点対称（原点を中心に曲線を 180 度回転させるとピタリと重なる）である。したがってまた，$\varsigma(x)$ は点 $(0, 0.5)$ について点対称である。

3. ロジスティック関数

生物の個体数 P は時間 t の関数だと想定する。そうすると，個体数の増加率は直前の個体数に比例すると考えることができる。すなわち，

$$\frac{dP}{dt}=rP$$

である。しかし，一定の環境下で個体数が無限に増加できるわけではなく，この環境が許容できる個体数の上限 K が存在し，P が K に近づくのに連れて増加率は逓減すると想定することができる。この関係を表したのが以下のような微分方程式（ロジスティック微分方程式）である。

$$\frac{dP}{dt}=rP\left(1-\frac{P}{K}\right)$$

ここで，$\lim_{P\to 0}\frac{dP}{dt}=0$，かつ $\lim_{P\to K}\frac{dP}{dt}=0$ である（すなわち，増加率は最初は 0 近くから始まり，最後も 0 近くで終わる）ということがわかる。

> 講義で取り挙げた新技術の普及を例にして言うと，普及率の増大は，最初はゆっくりだが，やがてスピードアップし，しかし最後はまたスピードダウンしてゆっくりになる，というイメージになる。

そして，r は潜在的に可能な増加率の上限だと解釈することができる。

> r が大きければ大きいほど，それだけますます急速に増加する。この点については，「4. 普及曲線」の「図 3 係数 r に応じた普及速度の相違」で見る。

では，この微分方程式を解いてみよう。

$$\frac{dP}{dt}=rP\left(1-\frac{P}{K}\right)=r\frac{P(K-P)}{K}$$

これは分離可能な微分方程式なので，

$$dP\cdot\frac{K}{P(K-P)}=rdt$$

にすることができる。部分分数分解により

$$dP\cdot\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right)=rdt$$

Memo

である。両辺を積分すると，

$$\int\left[\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}\right)\right]dP = r\int dt$$

である。ここで，$1=(-1)\cdot\frac{d}{dP}(K-P)$ であり，したがって，$\frac{1}{K-P}=\frac{(-1)\cdot\frac{d}{dP}(K-P)}{K-P}$ だから，

$$\int\frac{1}{P}dP-\int\left(\frac{\frac{d}{dP}(K-P)}{K-P}\right)dP = r\int dt$$

$$(\ln P + C_1)-\left[\ln(K-P)+C_2\right] = rt + C_3$$

である。なお，ここで，ln は自然対数を表す記号とする。また，C_i は積分定数（つまり任意の定数）であり，$C_3-C_1-C_2=C$ として，積分定数を右辺に集めよう。すなわち，

$$\ln P - \ln(K-P) = rt + C$$

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right) = rt + C$$

である。自然対数とその底との関係から，

$$\exp(rt+C) = \frac{P}{K-P}$$

である。これを P について解くと，

$$P = \left[\exp(rt+C)\right]\cdot(K-P)$$

$$P = K\cdot\exp(rt+C) - P\cdot\exp(rt+C)$$

$$P\cdot\left[1+\exp(rt+C)\right] = K\cdot\exp(rt+C)$$

$$P = \frac{K\cdot\exp(rt+C)}{1+\exp(rt+C)}$$

である。分母と分子を $\exp(rt+C)$ で割ると，

$$P = \frac{K\cdot\exp(rt+C)}{1+\exp(rt+C)} = \frac{\frac{K\cdot\exp(rt+C)}{\exp(rt+C)}}{\frac{1+\exp(rt+C)}{\exp(rt+C)}}$$

$$= \frac{K}{\frac{1}{\exp(rt+C)}+\frac{\exp(rt+C)}{\exp(rt+C)}}$$

$$= \frac{K}{\left[\exp(rt+C)\right]^{-1}+1}$$

である。ここで，

$\left[\exp(rt+C)\right]^{-1} = \left(e^{rt+C}\right)^{-1} = \exp(-rt-C)$　だから，

$$P = P(t) = \frac{K}{1+\exp(-rt-C)} \tag{2}$$

である。

さて，いま $t=0$，つまり初期における P の値（P の初期値）を P_0 と表現しよう。ここで，マイナスの個体数はそもそも定義されないし，また 0 の個体数からは個体の増加は生じえないから，$P_0>0$ である。すると，

$$P_0 = \frac{K}{1+\exp(-r\cdot 0-C)} = \frac{K}{1+\exp(-C)}$$

である。したがって，

$$1+\exp(-C) = \frac{K}{P_0}$$

したがってまた，

$$\exp(-C) = \frac{K}{P_0}-1 = \frac{K-P_0}{P_0} \tag{3}$$

である。したがってまた，

$$C = -\ln\left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)$$

である。こうして，任意の積分定数 C は実は初期の個体数と最大の個体数とによって規定されているということがわかる。いま $\alpha = \exp(-C) = \frac{K-P_0}{P_0}$　とすると，

$$P(t) = \frac{K}{1+\alpha\exp(-rt)} \tag{4}$$

Memo

である。この式を**ロジスティック関数**と呼ぶ。

4．普及曲線

『10. 労働生産力の上昇』では，イノベーションとしてはプロセスイノベーションが想定されつつ，普及は数量ベースではなく，率ベース（総供給量の中で，革新的企業が供給した量が占める比率）で定義された。したがって，新技術の普及を考える場合には，普及率 $D(t)$ は 0%より大きく，100%より小さいと考えることができる（$0<D(t)<1$）。したがって，普及の最大限は $K=1$ である。以上を前提として，ロジステック曲線型の普及を考えてみる。すると，式(2)および式(4)から，

$$D(t)=\frac{1}{1+\exp(-rt-C)}=\frac{1}{1+\alpha\exp(-rt)}$$

である。ここで，式(1)の単純な標準シグモイド関数が再現している。すなわち，

$$\frac{1}{1+\exp(-rt-C)}=\frac{1}{1+\exp[-(rt+C)]}$$
$$=\varsigma(rt+C)$$

である。

> 言うまでもなく，普及の絶対数の比較が問題である場合には，$D(t)$ は，率ベースではなく，数量ベース（累積値ベース）で定義されるべきだろう。

いま，普及率の初期値 D_0 を $D_0=0.01$（つまり，最初の革新的企業による最初の商品供給は 1%の市場シェアを得る）と仮定すると，式(3)から，

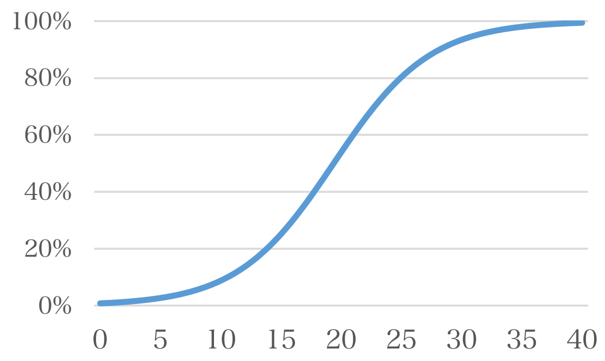
$$\alpha=\exp(-C)=\frac{K-D_0}{D_0}=\frac{1-0.01}{0.01}=99$$

である。また，$r=0.25$ と仮定すると，

$$D(t)=\frac{1}{1+99\cdot\exp(-0.25\cdot t)}$$

になる。$t=0$ から $t=40$ までの区間について，この式のグラフを書いてみよう。

図 2 普及のイメージ

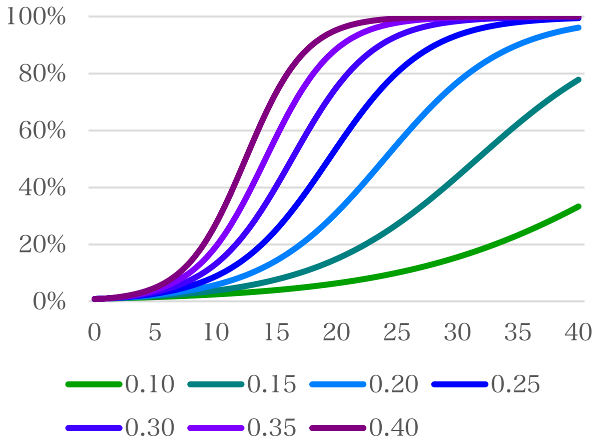


こうして，講義で用いていたような，普及曲線を得ることができた。

また，新技術の普及は，r の大きさが大きくなればなるほどますます急速に，小さくなればなるほどますます緩慢になる。以下では，$r=0.1$ から $r=0.4$ になるに連れて，普及速度が急速になるのを示したグラフである。

Memo

図 3 係数 r に応じた普及速度の相違



参考文献

1. 『微分方程式——その数学と応用——』（上巻），M.ブラウン著，一樂他訳，丸善出版，2014 年，ISBN:978-4-621061961

   簡潔ではあるが，ロジスティック関数の数学的な説明がまとめられている。特に，このレジュメでは詳しく触れなかった初期値問題に力を入れている。それとともに，人口および技術革新についてロジスティック関数の応用を取り挙げている。

2. 『技術革新の経済学』，R.クームズ・P.サビオッティ・V.ウォルシュ著，竹内啓・廣松毅監訳，新世社，1989 年，ISBN:4-915787-00-1

   技術革新について，ロジスティック関数の応用例とその問題点を取り挙げている。数学的な説明はほとんどない。

Memo